ENSEMBLES

Classification Thèmes de MégaMaths

Docs de Dany-Jack MERCIER

Exercice : Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence définie sur un ensemble E.
On dit qu'une partie S de E est saturée par la relation $\mathcal{R}$ si :

$$x \in S \Rightarrow \dot{x} \subset S$$

1°/ On appelle partie saturée engendrée par une partie A de E, et l'on note $Sat(A)$, la plus petite partie saturée de E contenant A. Montrer que $Sat(A) = \bigcup_{x \in A} \dot{x}$.

2°/ Soit $f : E \to F$ une application et $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence associée à cette application.

a) Vérifier que S est saturée par $\mathcal{R}$ ssi $f^{-1}(f(S)) = S$

b) Si $A \subset E$, déterminer $Sat(A)$.

c) Montrer l'existence d'une bijection entre les parties saturées de E et les parties de $f(E)$.

d) Si S est saturée par $\mathcal{R}$ et si $S \cap A = \emptyset$, montrer que $S \cap f^{-1}(f(A)) = \emptyset$

3°/ Si A et B sont saturées par $\mathcal{R}$, vérifier que les parties $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ et $\complement A$ sont aussi saturées par $\mathcal{R}$.

Solution :

1°/ Soit B saturée et $A \subset B$. Alors $x \in A \Rightarrow \dot{x} \in B \Rightarrow \bigcup_{x \in A} \dot{x} \subset B$.
Comme il est clair que $\bigcup_{x \in A} \dot{x}$ est saturé et contient A, ce sera bien la plus petite partie saturée contenant A.

2°/ a) S saturée par $\mathcal{R} \Leftrightarrow \forall x \in S \quad \dot{x} \subset S$

$$\Leftrightarrow \forall x \in S \quad \forall y \in E \quad f(x) = f(y) \Rightarrow y \in S \qquad (1)$$

Vérifions que $(1) \Leftrightarrow f^{-1}(f(S)) = S$:

($\Rightarrow$) On a toujours $f^{-1}(f(S)) \supset S$. Réciproquement, si $y \in f^{-1}(f(S))$ ie $f(y) \in f(S)$, $\exists x \in S \,/\, f(y) = f(x) \overset{(1)}{\Rightarrow} y \in S$ donc $f^{-1}(f(S)) \subset S$.

($\Leftarrow$) $\forall x \in S \quad \forall y \in E \quad f(x) = f(y) \Rightarrow y \in f^{-1}(f(S)) = S$ d'où (1).

b) $Sat(A) = \{x \in E \,/\, \exists a \in A \ f(x) = f(a)\} = f^{-1}(f(A))$

c) Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des parties saturées de E.

Posons :
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{\ \Psi\ } & \mathcal{P}(f(E)) \\ S & \longmapsto & f(S) \end{array}$$

* Ψ est bien définie
* Ψ surjective ?

lemme : $\forall K \subset f(E) \quad f(f^{-1}(K)) = K$

preuve : ($\subset$) toujours vraie

($\supset$) Si $y \in K \subset f(E)$ $\exists x \in E$ $f(x) = y \Rightarrow x \in f^{-1}(K) \Rightarrow y \in f(f^{-1}(K))$.

CQFD

Posons $K' \doteq f^{-1}(K)$. On aura :

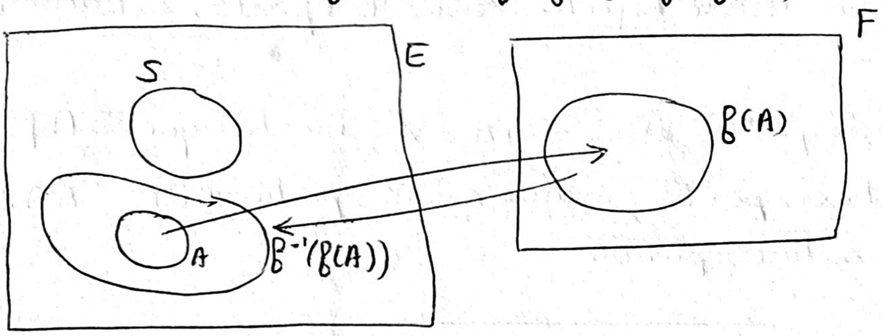
1) K' saturée car $f^{-1}(f(K')) = K' \Leftrightarrow f^{-1}(\underbrace{f(f^{-1}(K))}_{=K \text{ (cf lemme)}}) = f^{-1}(K)$

2) $\Psi(K') \doteq f(K') = \underbrace{f(f^{-1}(K)) = K}_{\text{(cf lemme)}}$

Donc Ψ surjective

* $\underline{\Psi \text{ injective}}$? $f(S) = f(S') \Rightarrow f^{-1}(f(S)) = f^{-1}(f(S')) \Rightarrow S = S'$ (car S et S' saturées)

d)



$$\left.\begin{array}{l} S = f^{-1}(f(S)) \\ A \cap S = \emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow S \cap f^{-1}(f(A)) = \emptyset \ ?$$

En effet, si $x \in S \cap f^{-1}(f(A))$ $\quad x \in S$ et $f(x) \in f(A)$

$\Downarrow$ $x \in f^{-1}(f(S))$ $\Downarrow$ $f(x) \in f(S)$ $\qquad\qquad$ $\Downarrow$ $\exists x' \in A \,/\, f(x) = f(x')$

Donc $f(x') \in f(S) \Rightarrow x' \in f^{-1}(f(S)) = S$, finalement $x' \in A \cap S$, ce qui est absurde.

CQFD

3°/ A et B saturés.

* $x \in A \cup B \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \in A \\ \text{ou} \\ x \in B \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dot{x} \subset A \\ \text{ou} \\ \dot{x} \subset B \end{array}\right. \Rightarrow \dot{x} \subset A \cup B$

* $x \in A \cap B \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \in A \\ \text{et} \\ x \in B \end{array}\right. \Rightarrow \dot{x} \in A \cap B$

* $x \in \complement A \Rightarrow \dot{x} \subset \complement A$ (sinon $\exists y \in \dot{x} \,/\, y \in A \Rightarrow \dot{y} = \dot{x} \subset A \Rightarrow x \in A$ absurde)

* $A \setminus B = A \cap \complement B$ est l'intersection de 2 parties $\mathcal{R}$-saturées.

Calculer les sommes : $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \dots$

$C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \dots$

$C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \dots$

Soit n fixé. Posons $A = C_n^0 + C_n^3 + \dots$

$B = C_n^1 + C_n^4 + \dots$

$C = C_n^2 + C_n^5 + \dots$

$$A + B + C = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$$

$$A + jB + j^2C = C_n^0 + jC_n^1 + j^2C_n^2 + C_n^3 + jC_n^4 + j^2C_n^5 + \dots = \sum_{k=0}^{n} C_n^k j^k \quad (\text{car } j^{3k+1} = j)$$

$$= (1+j)^n$$

On déterminera A, B, C grâce au système :

$$\begin{cases} A + B + C = 2^n \\ A + jB + j^2C = (1+j)^n \end{cases}$$

$C = 2^n - A - B$ donne, dans la seconde équation :

$$(1-j^2)A + (j-j^2)B = (1+j)^n - 2^n j^2$$

Compte tenu de $j^2 = -1 - j$, on obtient :

$$(2+j)A + (1+2j)B = (-j^2)^n + 2^n(j+1)$$

$$\boxed{(2A+B) + j(A+2B) = 2^n + 2^n j + (-1)^n j^{2n}}$$

On utilise la base $(1, j)$ du $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{C}$, et on remarque que $j^{2n} = j^{-n}$ dépend de la classe de congruence de n modulo 3. D'où les 3 cas :

<u>1er cas : Si $n \equiv 0$ [3]</u>, $j^{-n} = 1$ et $(2A+B) + j(A+2B) = 2^n + 2^n j + (-1)^n$

entraîne :

$$\begin{cases} 2A + B = 2^n + (-1)^n \\ A + 2B = 2^n \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} A = \frac{1}{3}\left(2.(-1)^n + 2^{n+1} - 2^n\right) \\ B = \frac{1}{3}\left((-1)^{n+1} + 2^{n+1} - 2^n\right) \end{cases}}$$

puis l'on tire $C = 2^n - A - B$ ...

2° cas : Si $n \equiv 1 \ [3]$,

$$(2A+B) + j\,(A+2B) = 2^n + 2^n j + (-1)^n \underbrace{j^2}_{-1-j}$$

$$= 2^n+(-1)^{n+1} + j\left(2^n+(-1)^{n+1}\right)$$

$$\begin{cases} 2A+B = 2^n+(-1)^{n+1} \\ A+2B = 2^n+(-1)^{n+1} \end{cases}$$

d'où $\boxed{A = B = \frac{1}{3}\left(2^n+(-1)^{n+1}\right)}$ puis C...

3° cas : Si $n \equiv 2 \ [3]$, on résout :

$$(2A+B) + j\,(A+2B) = 2^n + j\left(2^n+(-1)^n\right)$$

$$\begin{cases} 2A+B = 2^n \\ A+2B = 2^n+(-1)^n \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} A = \frac{1}{3}\left(2^n+(-1)^{n+1}\right) \\ B = \frac{1}{3}\left(2^n+2(-1)^n\right) \end{cases}}$$ puis C...

NB : Vérifier ces formules pour $n = 3, 4, 5$ ...

① Soient X un ensemble et f une application de X dans $\mathcal{P}(X)$.
On note : $$A = \{x \in X \,/\, x \notin f(x)\}$$

Montrer qu'il n'existe aucun $x \in X$ tel que $A = f(x)$. En déduire qu'il n'existe aucune application surjective de X vers $\mathcal{P}(X)$, et que l'on a $n < 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire aussi que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est un ensemble infini non dénombrable. (G. Cantor)

② Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
On définit une application f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ en posant :
$$f(n) = f_n(n) + 1 \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$
Montrer qu'il n'existe aucun entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $f = f_p$. En déduire que l'ensemble de toutes les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ est non dénombrable. (G. Cantor)

---

① Si $A = f(x_0)$, on aura :

$x_0 \in A \Rightarrow x_0 \notin f(x_0) = A$ absurde

$x_0 \notin A \Rightarrow x_0 \in f(x_0) = A$ absurde !

Donc $\nexists x_0 \in X \,/\, A = f(x_0)$., et aucune application $f : X \to \mathcal{P}(X)$ ne peut être surjective.

* Si $\# X = n \in \mathbb{N}^*$, on en déduit $n < 2^n$ (puisque si E et F sont 2 ens. de cardinaux finis, $\exists f : E \to F$ surjective $\overset{(*)}{\Longleftrightarrow}$ $\# E \geq \# F$)
* Si $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ était dénombrable, il existerait une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. C'est absurde d'après ce qui précède.

② Par l'absurde : si $p \in \mathbb{N}$ satisfait $f = f_p$, on aurait :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f_p(n) = f_n(n) + 1$$

d'où $$f_p(p) = f_p(p) + 1 \Rightarrow 0 = 1 \text{ absurde.}$$

(*) TSVP

(*) **lemme** : E, F de cardinaux finis.

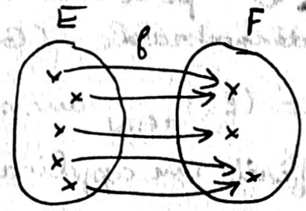
On a : $\exists f : E \twoheadrightarrow F$ surjective $\iff \#E \geq \#F$

preuve :

($\Leftarrow$) trivial (numérotez les éléments : $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $F = \{y_1, \dots, y_p\}$ avec $p \leq n$, et posez $f(x_i) = y_i$ pour $1 \leq i \leq p$, ...)

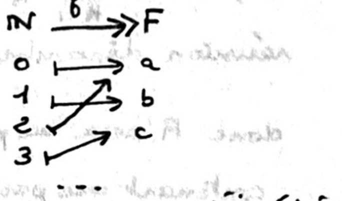
($\Rightarrow$) Si $f : E \to F$ est surjective, à tout $y \in F$ on peut associer l'un de ses antécédents par f, soit $m(y) \in E$. On a : $f \circ m = Id_F \Rightarrow m$ injective

$\Rightarrow m : F \to m(F) \subset E$ est bijective, et donc $\#F = \#m(F) \leq \#E$. CQFD



① Soient E un ensemble dénombrable et $f : E \rightarrow F$ une surjection.
Montrer qu'alors F est au plus dénombrable.

② Montrer que toute réunion d'une famille dénombrable d'ensembles dénombrables est un ensemble dénombrable.
(Ind. : on peut indexer la famille d'ensembles par $\mathbb{N}$, soit : $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, et utiliser le fait que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable)



① * 1re solution : Si F est infini, posons $f(0) = a \in F$, et $n_0 = 0$.

- $\{n \in \mathbb{N} / f(n) \neq a\} \neq \emptyset$ donc $\exists n_1 = \inf \{n \in \mathbb{N} / f(n) \neq a\}$
- $\{n \in \mathbb{N} / f(n) \notin \{a, f(n_1)\}\} \neq \emptyset$ donc $\exists n_2 = \inf \{n \in \mathbb{N} / f(n) \notin \{a, f(n_1)\}\}$
- On peut définir une suite $n_0, n_1, \ldots, n_k$ par récurrence en posant, si $n_0, \ldots, n_{k-1}$ ont déjà été construits :
$$n_k \doteq \inf\{n \in \mathbb{N} / f(n) \notin \{a, f(n_1), \ldots, f(n_{k-1})\}\}$$

Par construction : $n_0 < n_1 < \ldots < n_k < n_{k+1}$ ie $(n_k)_k$ est strict. croissante (donc $\lim n_k = +\infty$)
$f(n_0), \ldots, f(n_k), \ldots$ sont tous distincts 2 à 2.

Alors $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow F$, $i \mapsto f(n_i)$ est bijective.

φ surjective : $\forall y \in F \; \exists m \in \mathbb{N} \; y = f(m)$ donc $\exists k \; m < n_k$
donc $\exists i \in [0, k] \; f(m) = f(n_i)$
donc $y = f(n_i) = \varphi(i)$

φ injective : Par const., $i \neq j \Rightarrow n_i \neq n_j$ ($(n_k)_k$ est str. croissante !) et $n_i \neq n_j \Rightarrow f(n_i) \neq f(n_j)$.

CQFD

* 2e solution : On peut supposer que $E = \mathbb{N}$.

$\forall x \in F \quad f^{-1}(x) \neq \emptyset$ donc il existe $m(x) = \inf f^{-1}(x)$

On définit ainsi une application $m : F \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $f \circ m = Id_F$, ce qui entraîne que m est injective. Il existe donc une bijection de F sur une partie de $\mathbb{N}$, ie F est au plus dénombrable

② Soit $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ où chaque ensemble A_n est dénombrable.
Il existe une bijection $\varphi_n : \mathbb{N} \rightarrow A_n$, $p \mapsto \varphi_n(p)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
L'application $\varphi : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \rightarrow A$, $(n, p) \mapsto \varphi_n(p)$ est surjective de $\mathbb{N}^2$ (dénombrable) sur A, donc A sera au plus dénombrable d'après ①. A contenant une partie infinie (A_n) sera dénombrable. CQFD

* Vérifions que φ est surj. : $\forall x \in A \; \exists n \in \mathbb{N} \; x \in A_n$, et φ_n étant surj., $\exists p \in \mathbb{N} \; \varphi_n(p) = x$
soit $\varphi(n, p) = x$. OK

NB : On en déduit les 2 corollaires (Ramis I.1.4.3) :

(a) "Toute réunion finie d'ensembles dénombrables est dénombrable"

(b) "Toute réunion dénombrable d'ensembles finis est au plus dénombrable"

preuve :

On utilise la prop. (Ramis I.1.4.3. Pro.I) : "Toute partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable".

(a) Si $A=\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ est une réunion finie d'ens. dénombrables, A est inclus dans la réunion dénombrable $A'=\bigcup_{k=1}^{n} A_k \cup \bigcup_{k\geq n} \mathbb{N}$. A' est au plus dénombrable (d'après ②) donc A sera au plus dénombrable (d'après Pro.I), en fait dénombrable car contenant une partie infinie.

(b) Si les A_n sont finis, on peut écrire $A_n \subset B_n$ avec B_n dénombrable (Il suffit de prendre $B_n = A_n \cup \mathbb{N}$)

On a :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \underbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n}_{\text{dénombrable d'après ②}}$$

On déduit : "$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est au plus dénombrable" (d'après Pro.I. déjà citée)

CQFD

① Calculer $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n$

$$1 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n$$

② Calculer les sommes $A = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots$

$$B = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots$$

Quel est le cardinal de l'ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$ d'un ensemble fini E à n éléments ? Montrer que E possède autant de parties à cardinal pair que de parties à cardinal impair.

---

① $$\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = \sum_{k=1}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!} = n\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} = n\sum_{k'=0}^{n-1} C_{n-1}^{k'} = n2^{n-1}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}C_n^k = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k+1}$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1} - 1\right)$$

2e méthode : $(X+1)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p X^p \Rightarrow n(X+1)^{n-1} = \sum_{p=1}^{n} pC_n^p X^{p-1}$ d'où pour $X=1$: $n2^{n-1} = \sum_{p=1}^{n} pC_n^p$ (*)

② $$\begin{cases} A + B = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n \\ A - B = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = (1-1)^n = 0 \end{cases} \Rightarrow A = B = 2^{n-1}$$

$\# \mathcal{P}(E) = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$ d'après la formule du binôme, et ce que l'on vient de calculer n'est autre que le cardinal de la famille de $\mathcal{P}(E)$ constituée de parties ayant un nombre pair (resp. impair) d'éléments. On a vu :

$$A = B = 2^{n-1}.$$

(*) Cette 2e méthode fonctionne aussi bien pour la seconde somme : on intègre l'expression : $(X+1)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p X^p$ pour obtenir :

$$\frac{(X+1)^{n+1}}{n+1} = \sum_{p=0}^{n} C_n^p \frac{X^{p+1}}{p+1} + Cte$$

Si $X=0$, on trouve $Cte = \frac{1}{n+1}$. Faisons $X=1$, on obtient : $$\boxed{\frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} = \sum_{p=0}^{n}\frac{C_n^p}{p+1}}$$

Exercice : a) Montrer que pour $0 \leq k \leq p \leq n$, on a :

$$C_n^k C_{n-k}^{p-k} = C_p^k C_n^p \quad \text{puis que} \quad \sum_{k=0}^{p} C_n^k C_{n-k}^{p-k} = 2^p C_n^p$$

b) Montrer que :

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \qquad 1 + C_p^1 + C_{p+1}^2 + \dots + C_{p+n-1}^n = C_{p+n}^n$$

Preuve :

a) La 1re égalité est triviale, et $\sum_{k=0}^{p} C_p^k C_n^p = \left(\sum_{k=0}^{p} C_p^k\right) C_n^p = 2^p C_n^p$

b) Récurrence sur n, p étant fixé :

* Si $n = 1$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on a : $1 + C_p^1 = C_{p+1}^1$
* Au rang $n+1$:

$$1 + C_p^1 + \dots + C_{p+n-1}^n + C_{p+n}^{n+1} = C_{p+n}^n + C_{p+n}^{n+1} \quad (\text{hyp. réc.})$$

$$= C_{p+n+1}^{n+1} \quad (\text{triangle de Pascal !})$$

Exercice : Calculer $\sum_{p=0}^{n} p\, C_n^p$ et $\sum_{p=0}^{n} (-1)^p p\, C_n^p$

Solution : * Comme ci-dessus, $\sum_{p=0}^{n} p\, C_n^p = n\, 2^{n-1}$, la même méthode donnant :

$$\sum_{p=0}^{n} p(-1)^p C_n^p = (-n) \sum_{p'=0}^{n-1} C_{n-1}^{p'} (-1)^{p'} = (-n)(1-1)^{n-1} = 0 \quad (R)$$

* 2e méthode : $(X+1)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p X^p \Rightarrow n(X+1)^{n-1} = \sum_{p=0}^{n} p\, C_n^p X^{p-1}$ (si $n \geq 1$)

Si $X = 1$ on obtient $\sum_{p=0}^{n} p\, C_n^p = n \cdot 2^{n-1}$ et si $X = -1$, on a : $0 = \sum_{p=0}^{n} p\, C_n^p (-1)^{p-1}$.

Montrer que $\sum_{p=1}^{n} (-1)^p p\, C_n^p = 0$.

1re sol. : $\sum_{p=1}^{n} (-1)^p p\, C_n^p = \sum (-1)^p \frac{p\, n!}{p!(n-p)!} = n \sum (-1)^p \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!}$

$$= n \sum_{p=1}^{n} (-1)^p C_{n-1}^{p-1}$$

$$= n \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^{p+1} C_{n-1}^{p} = (-n) \underbrace{\sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p C_{n-1}^{p}}_{(1-1)^{n-1}=0} = 0$$

2e sol : On dérive $(X+1)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p X^p$:

$$n(X+1)^{n-1} = \sum_{p=1}^{n} p\, C_n^p X^{p-1}$$

et pour $X=-1$, on obtient : $0 = \sum_{p=1}^{n} (-1)^p p\, C_n^p$

(1) **Th** : S'il existe une injection $\mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_m$, alors $n \leq m$ (cf Ramis I p32)

preuve : Récurrence sur m avec l'hypothèse

$H(m)$: " Pour tout entier $1 \leq m' \leq m$ et tout $n' \in \mathbb{N}^*$, s'il existe une injection $\mathbb{N}_{n'} \hookrightarrow \mathbb{N}_{m'}$, alors $n' \leq m'$ "

- Vrai si $m = 1$ (ou $m=0$ car $\mathbb{N}_0 = \emptyset$)
- $H(m-1) \Rightarrow H(m)$: Si $m' < m$, on applique $H(m-1)$. Si $m' = m$,

et si $n' \in \mathbb{N}^*$, supposons l'existence d'une injection $f : \mathbb{N}_{n'} \hookrightarrow \mathbb{N}_m$. Cette injection induit une injection :

$$\mathbb{N}_{n'-1} \xhookrightarrow{f|_{\mathbb{N}_{n'-1}}} \mathbb{N}_m \setminus \{f(n')\} \xrightarrow[\text{bij}]{\sim} \mathbb{N}_{m-1}$$

et $H(m-1)$ entraine $n'-1 \leq m-1$, soit $n' \leq m$. La récurrence aboutit. □

Le paradoxe de Galilée énonce qu'il y a autant de carrés que d'entiers naturels (cf L'Univers Mathématique de Davis & Hersh, Gauthier-Villars 85). Pour l'expliquer, il faut savoir que

(2) **Th** : Un ensemble est infini ssi il est équipotent à l'une de ses parties ~~propres~~ strictes.

preuve :

- Si E est fini, il n'existe pas de partie $P \subsetneq E$ tq E et P soient équipotents car :

$$\left.\begin{array}{l} \text{Card } P = \text{Card } E \\ P \subset E \end{array}\right\} \Rightarrow P = E \qquad (*) \qquad \square$$

Preuve de $(*)$: ~~si Card P = Card E, il existe une bijection f~~ :
si l'on avait $P \subsetneq E$, il existerait $a \in E \setminus P$ et l'on aurait $P \subset E \setminus \{a\}$.

Alors $\text{Card } P \doteq p \leq \text{Card } E_{\setminus\{a\}} \doteq n-1$ absurde car $n = p$.

↓ (application directe)

→ Ramis p32, 4°/ prop. I à montrer en utilisant le Th (1) ci-dessus.

L'énoncé est :

Th : Si $F \subset E$ et E fini, alors F est fini et $\text{Card } F \leq \text{Card } E$.

preuve : par hyp. $E \simeq \mathbb{N}_n$. Il existe une bij. $f : E \to \mathbb{N}_n$. Alors $f : F \to f(F)$ est une bij. de F sur une partie de $\mathbb{N}_n$ qui est elle-même en bij. avec un certain $\mathbb{N}_p$ ($p \leq n$). Donc $F \simeq \mathbb{N}_p$ sera fini et $\text{Card } F = p \leq \text{Card } E = n$ □

• Mq E infini $\Rightarrow \exists P \subsetneq E \quad E \simeq P$

Si E est infini, on peut construire une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E par récurrence en posant :

$$a_0 \in E$$
$$a_1 \in E \setminus \{a_0\}$$
$$---$$
$$a_n \in E \setminus \{a_0, \dots, a_{n-1}\}$$
$$---$$

Tous les a_i sont distincts 2 à 2, de sorte que l'on ait défini une injection

$$f : \mathbb{N} \hookrightarrow E$$
$$n \longmapsto a_n$$

Définissons l'application,

$$g : E \longrightarrow E \setminus \{a_0\}$$
$$x \longmapsto x \text{ si } x \notin \{a_n / n \in \mathbb{N}\}$$
$$a_n \longmapsto a_{n+1}$$

g est clairement une bijection de E sur la partie propre $E\setminus\{a_0\}$.

□

I.1.29 p56

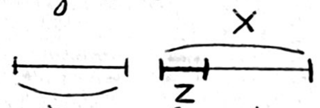
Calculer $\sum_{X\in\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)} \mathrm{Card}\, X$; $\sum_{(X,Y)\in\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)\times\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)} \mathrm{Card}\,(X\cap Y)$; $\sum_{(X,Y)\in\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)\times\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)} \mathrm{Card}\,(X\cup Y)$

Solution : $\mathbb{N}_n=\{1,\dots,n\}$, donc :

* $$\sum_{X\in\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)} \mathrm{Card}\, X = 1\times n + 2\times C_n^2 + \dots + (n-1)\,C_n^{n-1} + n\,C_n^n$$
$$= \sum_{p=1}^{n} p\,C_n^p = n\sum_{p=1}^{n} C_{n-1}^{p-1} = n\sum_{\ell=0}^{n-1} C_{n-1}^{\ell} = \boxed{n\,2^{n-1}}$$

* $$\sum_{(X,Y)\in\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)\times\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)} \mathrm{Card}\,(X\cap Y) = \sum_{X\in\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)} \underbrace{\left(\sum_{Y\in\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)} \mathrm{Card}\,(X\cap Y)\right)}_{\text{à calculer}}$$

Soit $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}_n) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$, $Y \longmapsto X\cap Y$. Si $X\cap Y = Z$, on a le diagramme :



reste $n-x$ éléments pour compléter Y de façon à ce que $X\cap Y = Z$

Notons $\#X = x$, alors $\#f^{-1}(Z) = 2^{n-x}$

Donc : $$\sum_{Y\in\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)} \mathrm{Card}\,(X\cap Y) = \sum_{Z\in\mathcal{P}(X)} 2^{n-x}\cdot \#Z = 2^{n-x}\sum_{Z\in\mathcal{P}(X)} \#Z = 2^{n-x}(x\,2^{x-1}) = x\,2^{n-1}$$

Finalement :

$$\sum_{X,Y} \mathrm{Card}\,(X\cap Y) = \sum_{X\in\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)} x\,2^{n-1} = 2^{n-1}\sum_{X\in\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)} \#X = 2^{n-1}\cdot(n\,2^{n-1}) = \boxed{n.4^{n-1}}$$

Vérification : $\mathbb{N}_2 = \{1, 2\}$

$\mathcal{P}(\mathbb{N}_2) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \mathbb{N}_2\}$

on trouve $\sum_{X,Y} \mathrm{Card}(X\cap Y) = 8$

Y \ X	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\mathbb{N}_2$
$\emptyset$	0	0	0	0
$\{1\}$	0	1	0	1
$\{2\}$	0	0	1	1
$\mathbb{N}_2$	0	1	1	2

Tableau des $\#(X\cap Y)$

$$\sum_{X,Y} z(X \cup Y) = \sum_{X} \Big(\sum_{Y} z X + z Y - z(X \cap Y) \Big)$$

$$= \sum_{X} \Big(z X \, . \, z(N_n) + n . 2^{n-1} - \sum_{Y} z(X \cap Y) \Big)$$

$$= n . 2^{n-1} . 2^{n} + n \, 2^{n-1} . z(N_n) - \sum_{X,Y} z(X \cap Y)$$

$$= \boxed{n . 2^{2n} - n \, 4^{n-1}}$$ d'après ce qui précède.

<u>Vérification</u> : Si $n = 2$,

On trouve bien :

$$\sum_{X,Y} z(X \cup Y) = 24$$

$Y \backslash X$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	N_2
$\emptyset$	0	1	1	2
$\{1\}$	1	1	2	2
$\{2\}$	1	2	1	2
N_2	2	2	2	2

Tableau des $z(X \cup Y)$

Exercice : Si A et B désignent 2 parties d'un ensemble E, on pose $B\setminus A = B \cap \complement_E A$ et l'on définit la différence symétrique de A et B par :

$$A \Delta B \doteq (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

1°/ Montrer que $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

2°/ Prouver que la loi Δ est associative dans $\mathcal{P}(E)$, ie que pour toutes les parties A, B, C de E, on a :

$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C) \qquad (*)$$

3°/ Démontrer qu'il existe une partie unique X de E qui vérifie :

a) $\forall A \in \mathcal{P}(E) \quad A \Delta X = X \Delta A = A$

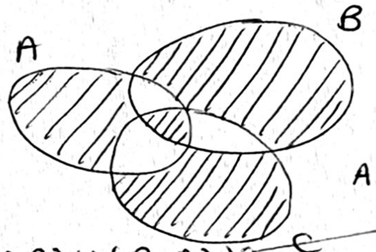
b) $\forall A \in \mathcal{P}(E) \quad \exists A' \in \mathcal{P}(E)$ telle que $A \Delta A' = A' \Delta A = X$

(Conclusion : $(\mathcal{P}(E), \Delta)$ est un groupe commutatif)

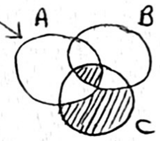
Solution :

1°/ Évident

2°/ Utilisons le 1°/ :



AΔBΔC hachuré



$$(A \Delta B) \Delta C = ((A\setminus B) \cup (B \setminus A)) \Delta C$$

$$= ((A\setminus B) \cup (B\setminus A)) \setminus C \;\cup\; C \setminus ((A\setminus B) \cup (B \setminus A))$$

(*) facile ; cf (*)

$$= ((A\setminus B)\setminus C) \cup ((B\setminus A)\setminus C) \cup [(C\setminus(A\setminus B)) \cap (C \setminus (B\setminus A))]$$

on montre directement que cette partie est : cf (**)

$$(C \setminus (A \cup B)) \cup (A \cap B \cap C)$$

aussi facile qu'avec (**) de montrer directement ce résultat.

$$(A\Delta B)\Delta C = (A \setminus (B \cup C)) \cup (B \setminus (A \cup C)) \cup (C \setminus (A \cup B)) \cup (A \cap B \cap C) \qquad (1)$$

Comme $A \Delta (B \Delta C) = (B \Delta C) \Delta A$, on utilise la formule (1) qui montre de façon évidente que $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.

CQFD

(*) preuve de : $C \setminus (S \cup T) = (C \setminus S) \cap (C \setminus T)$

C'est la formule classique $\complement_C S \cup T = \complement_C S \cap \complement_C T$ compte tenu de $\complement_C S \doteq C \setminus S$.

(**) preuve de : $(C \setminus (A \setminus B)) \cap (C \setminus (B \setminus A)) = (C \setminus (A \cup B)) \cup (A \cap B \cap C)$

($\subset$) Si $x \in C\setminus(A\setminus B) \cap C \setminus (B \setminus A)$ alors : $x \in C$ et $x \notin A \cup B$ donc $x \in C \setminus (A \cup B)$
ou
$x \in C$ et $x \in A\cup B$, mais alors $x \in A \cap B$ donc $x \in A \cap B \cap C$

($\supset$) Facile.

((*) voir remarque ci-derrière : preuve simplifiée !)

3°/ * $\forall A \in \mathcal{P}(E)$ $A \Delta \emptyset = A \setminus \emptyset \cup \emptyset \setminus A = A$

* Si $A' = A$, on a : $A \Delta A = A \setminus A \cup A \setminus A = \emptyset$ oui.

(*) <u>Remarque</u> : La preuve du 2°/ est facilitée par l'indication suivante ;
Démontrer que $A \Delta B = (A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})$. En déduire l'associativité de Δ.

preuve : $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) = (A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})$ est trivial.
Cela étant :

$$(A \Delta B) \Delta C = ((A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})) \Delta C = \{[(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})] \cup C\} \cap \{\overline{[(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})]} \cup \bar{C}\}$$

$$= (A \cup B \cup C) \cap (\bar{A} \cup \bar{B} \cup C) \cap (\bar{A} \cup B \cup \bar{C}) \cap (A \cup \bar{B} \cup \bar{C})$$ sans peine.

Cette dernière expression est invariante par permutation circulaire.
CQFD